

32 導関数, 接線

276

点 P は $y = f(x)$ 上の点だから, $2 = f(-1) = -1 + a - b + c \quad \therefore a - b + c = 3 \quad \dots \textcircled{1}$

点 P における接線の方程式は $y = x + 3$ だから, $f'(-1) = 1$

これと $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ より, $3 - 2a + b = 1 \quad \therefore 2a - b = 2 \quad \dots \textcircled{2}$

点 Q における接線の方程式は $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

これが点 P を通るから, $2 = -3f'(2) + f(2)$

よって, $2 = -3(12 + 4a + b) + 8 + 4a + 2b + c \quad \therefore 8a + b - c = -30 \quad \dots \textcircled{3}$

①～③の連立方程式を解くことにより, $a = -3, b = -8, c = -2$

277

点 P における接線の方程式は $y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$

すなわち $y = (4\alpha^3 - 6\alpha^2)(x - \alpha) + \alpha^4 - 2\alpha^3$ より, $y = (4\alpha^3 - 6\alpha^2)x - 3\alpha^4 + 4\alpha^3$

よって, $y = f(x) = x^4 - 2x^3$ と $y = (4\alpha^3 - 6\alpha^2)x - 3\alpha^4 + 4\alpha^3$ の共有点の x 座標は $x^4 - 2x^3 = (4\alpha^3 - 6\alpha^2)x - 3\alpha^4 + 4\alpha^3$ すなわち $x^4 - 2x^3 - (4\alpha^3 - 6\alpha^2)x + 3\alpha^4 - 4\alpha^3 = 0$ の解である。

また, α は接点の x 座標だから, α はこの方程式の重解である。

よって, 左辺を $(x - \alpha)^2$ を割ることにより, $(x - \alpha)^2 \{x^2 + 2(\alpha - 1)x + 3\alpha^2 - 4\alpha\} = 0$ となる。
したがって, $x^2 + 2(\alpha - 1)x + 3\alpha^2 - 4\alpha = 0$ が α でない異なる 2 実数解をもてば題意が満たされる。

$x^2 + 2(\alpha - 1)x + 3\alpha^2 - 4\alpha = 0$ の解が α でないことから,

$\alpha^2 + 2(\alpha - 1)\alpha + 3\alpha^2 - 4\alpha \neq 0$ すなわち $6\alpha(\alpha - 1) \neq 0 \quad \therefore \alpha \neq 0, 1 \quad \dots \textcircled{4}$

$x^2 + 2(\alpha - 1)x + 3\alpha^2 - 4\alpha = 0$ が異なる 2 実数解をもつことから,

判別式を D とすると, $\frac{D}{4} = (\alpha - 1)^2 - 3\alpha^2 + 4\alpha = -2\alpha^2 + 2\alpha + 1 > 0$

よって, $2\alpha^2 - 2\alpha - 1 < 0$ を解くことにより, $\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < \alpha < \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad \dots \textcircled{5}$

ゆえに, 求める α の値の範囲は, ④かつ⑤より,

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < \alpha < 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 1 < \alpha < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

278

$$y=f(x)=x^3+2ax^2-3a^2x-4, \quad y=g(x)=ax^2-2a^2x-3a \text{ とおき,}$$

共有点の x 座標を t とすると, 共有点で共通接線をもつための必要十分条件は

$$f(t)=g(t) \text{ かつ } f'(t)=g'(t)$$

$$f(t)=g(t) \text{ より, } t^3+2at^2-3a^2t-4=at^2-2a^2t-3a$$

$$\text{すなわち } t^3+at^2-a^2t+3a-4=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(t)=g'(t) \text{ より, } 3t^2+4at-3a^2=2at-2a^2$$

$$\text{すなわち } 3t^2+2at-a^2=0 \quad \therefore (t+a)(3t-a)=0 \quad \therefore t=-a, \frac{a}{3}$$

$$t=-a \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入し整理すると, } a^3+3a-4=0 \text{ より, } (a-1)(a^2+a+4)=0 \quad \therefore a=1$$

$$t=\frac{a}{3} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入し整理すると, } -\frac{5a^3-81a+108}{27}=0$$

$$\text{よって, } 5a^3-81a+108=0 \text{ より, } (a-3)(5a^2+15a-36)=0 \quad \therefore a=3, \frac{-15 \pm 3\sqrt{105}}{10}$$

$$\text{以上より, } a=1, 3, \frac{-15 \pm 3\sqrt{105}}{10}$$

279

(1)

$$f'(s)=f'(t) \text{ より, } 3s^2+2as+b=3t^2+2at+b \quad \therefore (s-t)(3s+3t+2a)=0$$

$$\text{これと } s \neq t \text{ より, } 3s+3t+2a=0$$

(2)

$$\text{線分 PQ の中点の座標は } \left(\frac{s+t}{2}, \frac{f(s)+f(t)}{2} \right) \text{ である。}$$

したがって, 線分 PQ の中点が C 上にあることを示すには,

$$\frac{f(s)+f(t)}{2}=f\left(\frac{s+t}{2}\right) \text{ が成り立つことを示せばよい。}$$

$$3s+3t+2a=0 \text{ より, } s+t=-\frac{2}{3}a$$

$$\begin{aligned} \frac{f(s)+f(t)}{2} &= \frac{1}{2}(s^3+as^2+bs+c+t^3+at^2+bt+c) \\ &= \frac{1}{2}\{s^3+t^3+a(s^2+t^2)+b(s+t)+2c\} \\ &= \frac{1}{2}\left[(s+t)(s^2-st+t^2)+a\{(s+t)^2-2st\}+b(s+t)+2c\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(s+t)\{(s+t)^2-3st\}+a\{(s+t)^2-2st\}+b(s+t)+2c\right] \end{aligned}$$

ここで, $3s+3t+2a=0$ より, $s+t=-\frac{2}{3}a$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{f(s)+f(t)}{2} &= \frac{1}{2} \left[(s+t) \left\{ (s+t)^2 - 3st \right\} + a \left\{ (s+t)^2 - 2st \right\} + b(s+t) + 2c \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{2}{3}a \left(\frac{4}{9}a^2 - 3st \right) + a \left(\frac{4}{9}a^2 - 2st \right) - \frac{2}{3}ab + 2c \right\} \\ &= \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}f\left(\frac{s+t}{2}\right) &= f\left(-\frac{a}{3}\right) \\ &= -\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c \\ &= \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\end{aligned}$$

よって, $\frac{f(s)+f(t)}{2} = f\left(\frac{s+t}{2}\right)$ が成り立つ。

ゆえに, 線分 PQ の中点は C 上にある。

280

(1)

$y=f(x)=x^3-kx$ とおくと, $f'(x)=3x^2-k$ より,

点 P における接線の方程式は, $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

すなわち $y=(3a^2-k)(x-a)+a^3-ka$ より, $y=(3a^2-k)x-2a^3$

よって, 点 Q の x 座標は $x^3-kx=(3a^2-k)x-2a^3$ すなわち $x^3-3a^2x+2a^3=0$ の解のうち a でない方である。

$x^3-3a^2x+2a^3=0$ は, a を重解にもつことから, $(x-a)^2(x+2a)=0$ と表せる。

よって, 点 Q の x 座標は $-2a$

これより, 点 Q の y 座標は $f(-2a)=-8a^3+2ka$

ゆえに, 点 Q の座標は $(-2a, -8a^3+2ka)$

ただし, P と Q は異なる点より, $a \neq 0$

(2)

点 Q における接線の傾きは $f'(-2a)=12a^2-k$

よって, 満たすべき条件は $f'(a)f'(-2a)=-1$ すなわち $(3a^2-k)(12a^2-k)=-1$

これを展開し, a について整理すると, $36a^4-15ka^2+k^2+1=0$

ここで, $a^2=t$ とおくと, $36t^2-15kt+k^2+1=0$

これと $a^2>0$ より, $36t^2-15kt+k^2+1=0$ が少なくとも 1 つの正の実数解をもてばよく,

これは放物線 $y=36t^2-15kt+k^2+1$ が t 軸の正の部分と少なくとも 1 つの共有点をもつこ

とと同値である。

$$y = g(t) \text{ とおくと, } y = g(t) = 36t^2 - 15kt + k^2 + 1 = 36\left(t - \frac{5}{24}k\right)^2 + \frac{-9k^2 + 16}{16} \text{ より,}$$

$$t \text{ 軸と共有点をもつための条件は } g\left(\frac{5}{24}k\right) = -9k^2 + 16 \leq 0 \text{ すなわち } k \leq -\frac{4}{3} \text{ または } \frac{4}{3} \leq k$$

$$k \leq -\frac{4}{3} \text{ のとき}$$

$$\text{軸 } t = \frac{5}{24}k < 0 \text{ だから, } g(0) < 0 \text{ を満たせばよい。}$$

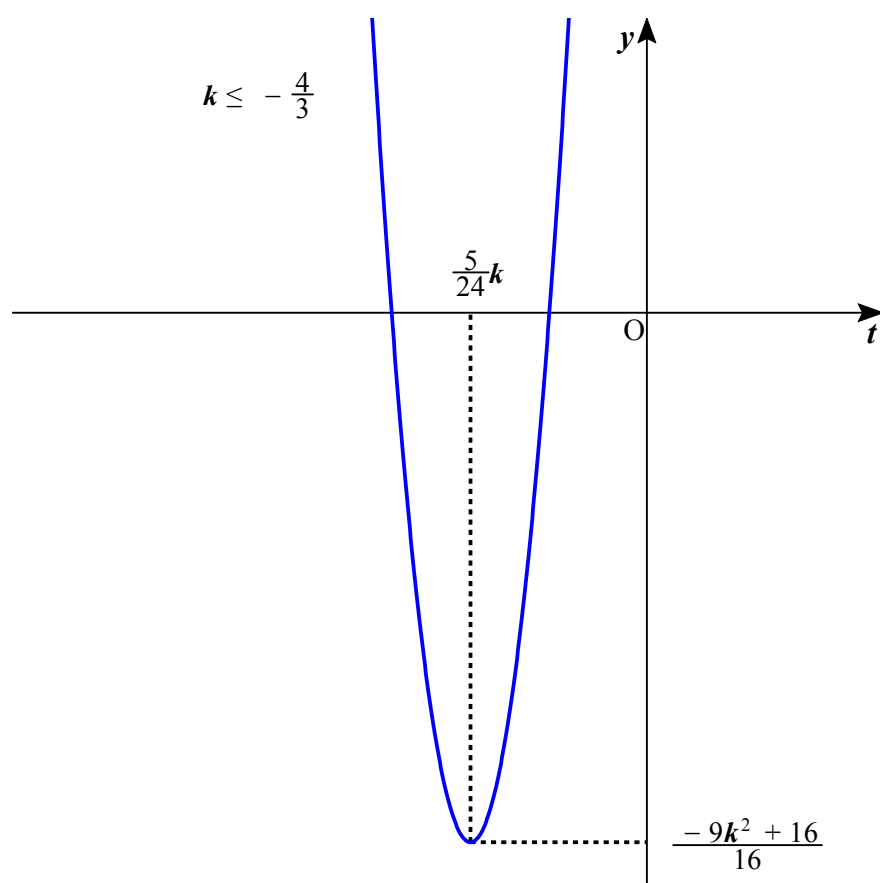
$$\text{ところが, } g(0) = k^2 + 1 > 0$$

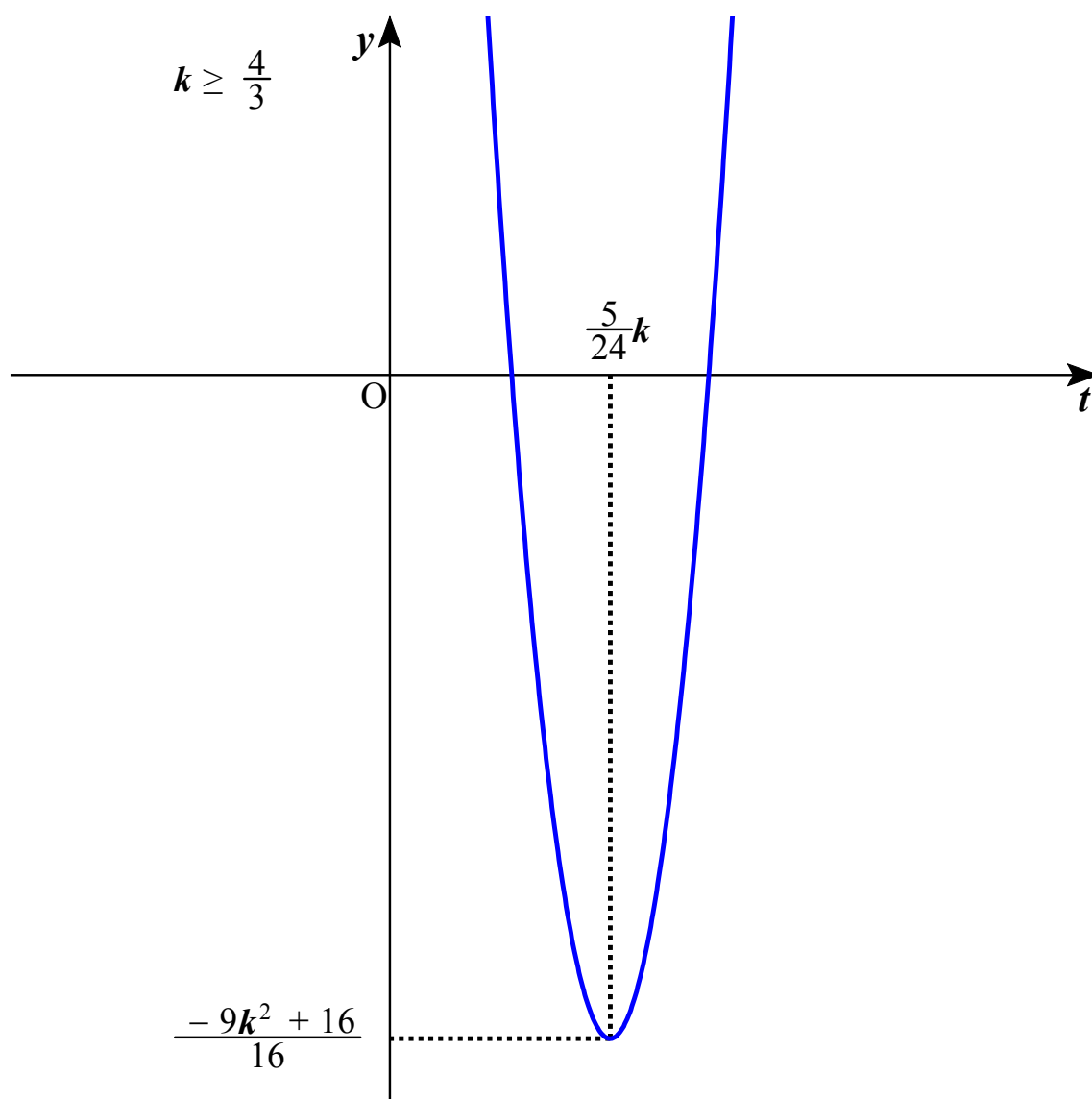
よって, 不適

$$k \geq \frac{4}{3} \text{ のとき}$$

$$\text{軸 } t = \frac{5}{24}k > 0 \text{ だから, } y = g(t) \text{ は } t \text{ 軸の正の部分と少なくとも 1 つの共有点をもつ}$$

$$\text{よって, } k \geq \frac{4}{3}$$





281

$f(x)$ を $(x-a)^2$ で割ったときの商と余りをそれぞれ $Q(x)$, $mx+n$ とおくと,

$$f(x) = (x-a)^2 Q(x) + mx + n$$

また, これより, $f'(x) = 2(x-a)Q(x) + (x-a)^2 Q'(x) + m$

よって,
$$\begin{cases} f(a) = ma + n \\ f'(a) = m \end{cases}$$

これを解くことにより, $m = f'(a)$, $n = f(a) - af'(a)$

ゆえに, 余りは $f'(a)x + f(a) - af'(a)$

282

(1)

$f(x) = (x+2)f'(x) - \{f'(x)^2\}$ において、 $f(x)$ を n 次式とすると、 $(x+2)f'(x)$ は n 次式、 $\{f'(x)\}^2$ は $2(n-1)$ 次式である。したがって、左辺と右辺の式の次数が一致するためには、すなわち右辺の式の次数が n であるためには、 $\{f'(x)\}^2$ の次数が n を超えてはならない。

よって、 $2(n-1) \leq n$ より、 $n \leq 2$

ゆえに、 $f(x)$ は 3 次以上にはならない。

(2)

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと、 $f'(x) = 2ax + b$ および $f'(1) = \frac{3}{2}$ より、 $2a + b = \frac{3}{2}$. . . ①

また、 $f(x) = (x+2)f'(x) - \{f'(x)^2\}$ において、
 $(x+2)f'(x) - \{f'(x)^2\} = (x+2)(2ax+b) - (2ax+b)^2$
 $= (2a - 4a^2)x^2 + (4a + b - 4ab)x + 2b - b^2$

より、

$$ax^2 + bx + c = (2a - 4a^2)x^2 + (4a + b - 4ab)x + 2b - b^2$$

よって、

$$a = 2a - 4a^2 \quad \text{すなわち} \quad a(4a - 1) = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \text{②}$$

$$b = 4a + b - 4ab \quad \text{すなわち} \quad 4a(b - 1) = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \text{③}$$

$$c = 2b - b^2 \quad \cdot \cdot \cdot \text{④}$$

$$\text{②より、} \quad a(4a - 1) = 0 \quad \therefore a = 0, \frac{1}{4}$$

(i) $a = 0$ のとき

$$\text{①より、} \quad b = \frac{3}{2}$$

$$\text{これを③に代入することにより、} \quad c = \frac{3}{4}$$

$$\text{これと③は任意の} b \text{ で成り立つことから、} \quad f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$$

(ii) $a = \frac{1}{4}$ のとき

①より、 $b = 1$ これは③を満たす。

また、 $b = 1$ を④に代入することにより、 $c = 1$

$$\text{よって、} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

$$(i), (ii) \text{より、} \quad f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}, \quad f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

283

(1)

$$f'(x) = 2ax + b \text{ より, } f'(0) = b \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(0) = c \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(a + 2b + 4c) \text{ より, } a + 2b + 4c = 4f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$f(1) = a + b + c \text{ より, } a + b + c = f(1) \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \text{ より, } b + 3c = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) \quad \therefore b = -3c + 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)$$

$$\text{これと}\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } f'(0) = -3f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)$$

(2)

$$0 \leq x \leq 1 \text{ において } -1 \leq f(x) \leq 1 \text{ より, } -3 \leq -3f(0) \leq 3, \quad -4 \leq 4f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 4, \quad -1 \leq -f(1) \leq 1$$

$$\text{よって, } -3 + (-4) + (-1) \leq -3f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) \leq 3 + 4 + 1$$

$$\text{すなわち, } -8 \leq -3f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) \leq 8$$

$$\text{ゆえに, } |f'(0)| \leq 8$$

(3)

(i) $f'(0) = 8$ のとき

$$f'(0) = -3f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) \text{ と条件より, } f(0) = -1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad f(1) = -1$$

$$\text{よって, } \textcircled{1} \sim \textcircled{4} \text{ より, } b = 8, \quad c = -1, \quad a + 2b + 4c = 4, \quad a + b + c = -1$$

$$\text{これを解くことにより, } (a, b, c) = (-8, 8, -1) \quad \therefore f(x) = -8x^2 + 8x - 1$$

(ii) $f'(0) = -8$ のとき

$$\text{同様にして, } f(0) = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -1, \quad f(1) = 1 \text{ より,}$$

$$b = -8, \quad c = 1, \quad a + 2b + 4c = -4, \quad a + b + c = 1$$

$$\text{これを解くことにより, } (a, b, c) = (8, -8, 1) \quad \therefore f(x) = 8x^2 - 8x + 1$$

$$(i), (ii) \text{ より, } f(x) = -8x^2 + 8x - 1, \quad f(x) = 8x^2 - 8x + 1$$